Εισαγωγή στη Μαθηματική Φυσική, Ασκήσεις 3ου και 4ου Κεφαλαίου

Διδάσκων: Μιχάλης Ξένος,
email : *mxenos@cc.uoi.gr*

23 Δεκεμβρίου 2015

1. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή:

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1, \ 0 \leq x \leq L,$$

αν $u(0) = u(L) = 0$. Να εξετάσετε αν ο τελεστής είναι αυτοπροσαρτημένος.

2. Να αποδείξετε τον τύπο διπλασιασμού της συνάρτησης $\Gamma(x)$, δηλαδή:

$$2^{2\rho-1}\Gamma(\rho)\Gamma(\rho+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\rho).$$

Υπόδειξη: Ισχύει η σχέση $B(\rho+\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(\rho+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\rho+1)}$

3. Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Να δείξετε ότι όλες οι ιδιοτιμές του, λ, είναι (i) πραγματικές και μη αρνητικές και (ii) σχηματίζουν μια γνησίως αύξουσα ακολουθία λ_n με $\lim \lambda_n \to \infty$.

4. Έστω ο τελεστής T_a με δράση:

$$T_a f(x) = f(x+a), \quad x \in \mathbb{R}, \ a > 0$$

(α) Να εξετάσετε αν ο τελεστής T_a είναι γραμμικός.

(β) Να δείξετε ότι ο τελεστής T_a είναι μοναδιακός και να βρεθούν ο προσαρτημένος και ο αντίστροφός του.

(γ) Επαναλάβετε το ερώτημα (β) στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο a. Τι γίνεται αν $a \to \infty$;

5. Να δώσετε τον ορισμό της συνάρτησης $\Gamma(n)$ σε μορφή γενικευμένου ολοκληρώματος. Βρείτε τις τιμές $\Gamma(1)$ και $\Gamma(1/2)$. Αν n θετικός ακέραιος, να δείξετε ότι $\Gamma(n+1) = n!$.

6. Θεωρείστε το σύστημα εξισώσεων: $\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r^2 \dfrac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0, & (1) \\ \dfrac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\, \dfrac{d\Phi}{d\phi}\right) + \lambda \sin\phi\, \Phi = 0, & (2) \end{cases}$

όπου $R = R(r)$, $\Phi = \Phi(\phi)$ και $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \phi \leq \pi$. (α) Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητής $x = \cos\phi$ για να μετατρέψετε την εξίσωση (2) στην εξίσωση:

$$(1-x^2)y'' - 2xy + \lambda y = 0$$

όπου $y = y(x)$ και $-1 \leq x \leq 1$. (β) Αντιστοιχίστε την λύση $y = y(x)$ σε ένα γνωστό πολυώνυμο και βρείτε την ιδιοτιμή λ. Γράψτε δύο λύσεις της εξίσωσης (2) και καθώς και τις ιδιοτιμές στις οποίες αντιστοιχούν.

7. Να δείξετε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f(x)$, $x \in [0, l]$, μπορεί να γραφεί ως $f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n y_n^{(1)} + b_n y_n^{(2)}\right)$, όπου $y_n^{(1)}$ και $y_n^{(2)}$ οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l)$$

Να βρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις $y_n^{(1)}$ και $y_n^{(2)}$ καθώς και οι σταθερές a_0, a_n και b_n.

8. Θεωρείστε τα πολυώνυμα Hermite , $H_n(x)$, με γεννήτρια συνάρτηση $e^{2tx-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^2$. Να δείξετε ότι:

(α) Ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

(β) $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$.

(γ) Είναι ορθογώνια με συνάρτηση βάρους $w(x) = e^{-x^2}$.

(δ) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (α) για $n = 1$.

9. Θεωρείστε τις συναρτήσεις $\Gamma(x)$ και $B(x)$. Να δείξετε ότι:

(α) Για $m, n > 0$ ισχύει $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

(β) Αν $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}$, τότε $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(p\pi)}$ για $0 < p < 1$.

(γ) Με βάση τον ορισμό $B(m,n) = B(n,m)$, να επαληθεύεστε με το ερώτημα (α).

10. (α) Έστω ο τελεστής T ορισμένος σε ένα χώρο Hilbert. Να δείξετε ότι, αν ο T^{-1} υπάρχει, τότε μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται και ο T. (β) Έστω οι μεταθετοί τελεστές S και T, ορισμένοι σε ένα χώρο Hilbert. Να δείξετε ότι ο τελεστής ST είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι S και T είναι αντιστρέψιμοι. (γ) Να δείξετε ότι ο τελεστής K με δράση $K\phi(x) = \displaystyle\int_0^{1-x} \phi(t)\,dt$, $0 \le x \le 1$ είναι αυτοπροσαρτημένος.

11. Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2} y'(1)$$

Να δείξετε ότι όλες οι ιδιοτιμές του είναι μιγαδικές εκτός από μια και να τις υπολογίσετε.

12. Θεωρείστε τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger : $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$. Να ορίσετε τον τελεστή H και να δείξετε ότι για κάθε χρονικά ανεξάρτητο κβαντικό τελεστή A ισχύει:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\psi|[H,A]|\psi\rangle.$$

Οι ασκήσεις μπορούν να επιστραφούν και μέσω email (mxenos@cc.uoi.gr) μέχρι την ημέρα της εξέτασης του μαθήματος.

Βιβλιογραφία:

Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής, Τόμος I, Βέργαδος I., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1η έκδοση, 2009.